Teorema de Laplace

Resumo

Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace generaliza o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem. Como há métodos bem definidos para o cálculo de determinantes de matriz quadradas de ordem 1, 2 e 3, utilizamos esses resultados para calcular determinantes de matrizes de ordem maior que 3. O teorema enuncia que:

"O determinante de uma matriz A (quadrada de ordem n) é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) e de seus respectivos cofatores."

O cofator de um elemento da matriz quadrada

Cofator de um elemento da matriz é um número real associado a um elemento de uma matriz quadrada de ordem n > 1, o que implica em dizer que essa matriz possui n×n cofatores, uma vez que cada um de seus elementos possui um cofator associado, de tal modo que eles podem ser encontrados de acordo com a estratégia a seguir:

Seja $A = a_{ij}$ uma matriz de ordem n e a_{ij} é o elemento da matriz A que se encontra na linha i e na coluna j. O cofator do elemento a_{ij} é o produto do fator $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz obtida a partir da matriz A, de ordem n – 1, em que se eliminam a linha i e a coluna j, ou seja, o cruzamento da linha e da coluna onde se encontra o elemento a_{ij}. O cofator de um elemento a_{ij} é dado por C_{ij}.

Exemplo: Calcule o cofator do elemento a_{13} da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como $a_{13} = 3$, então:

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C13 = 1 \cdot [(-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-3)] = 2$$

Cálculo usando o Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace não especifica qual linha ou coluna deva ser utilizada; assim, podemos escolher qualquer uma delas. O exemplo a seguir será resolvido por meio de três filas (linhas ou colunas) distintas, mostrando que ambas resultam no mesmo valor.

Vamos encontrar o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ por meio de filas diferentes.

→ Por meio da primeira linha:

$$a_{11} = 0 \rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$a_{12} = 0 \rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot [2 - (-6)] = -8$$

$$a_{13} = 7 \rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-8) = 9$$

Portanto, obtemos:

$$\det(A) = 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-8) + 7 \cdot 9 = 63$$

→ Por meio da segunda linha:

$$a_{21} = 1 \rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 - 7) = 7$$

$$a_{22} = 4 \rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-14) = 14$$

$$a_{23} = 3 \rightarrow C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 = 0$$

Portanto, obtemos:

$$\det(A) = 1 \cdot 7 + 4 \cdot 14 + 3 \cdot 0 = 63$$

→ Por meio da segunda coluna:

$$a_{12} = 0 \rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2-(-6)] = \\ = -8$$

$$a_{22} = 4 \rightarrow C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0-(-14) = 14$$

$$a_{32} = 1 \rightarrow C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [0-7] = 7$$

Portanto, obtemos:

$$\det(A) = 0 \cdot (-8) + 4 \cdot 14 + 1 \cdot 7 = 63$$

Vimos que as três opções resultam no mesmo valor, mas vamos utilizar a regra de Sarrus, um método conhecido para calcular determinantes de matrizes de ordem 3 para validar os cálculos realizados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \left| \begin{matrix} 0 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \det A = 0 + 0 + 7 - (56) - 0 - 0 = 7 + 56 = 63$$

Exercícios

1. Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Encontre o determinante da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Resolva a equação abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

5. Resolva a equação abaixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 3 & 1 & x & -2 \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -39$$

6. Sabendo que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -1470$, calcule os determinantes das seguintes matrizes.

a) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & 8 \\ 2 & -3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 11 \\ 7 & 6 & 14 & 2 \\ 2 & -5 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 14 & -4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 11 \\ 7 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 8 \\ 7 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$

7. Resolva a equação abaixo:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix}$$

8. Uma matriz 4 x 4 que admite inversa é

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$

9. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = [2]$, o valor de $\dfrac{\det(A)\cdot\det(B)}{\det(C)\cdot\det(D)}$ é igual a

a) 0
b) 15
c) 20
d) 10
e) 25

10. Sejam dados: a matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, encontre o conjunto solução da equação $\det(A) = 0$.

Gabarito

1. Aplicando Laplace é interessante escolher a linha ou coluna que possui mais zeros. Assim elimina-se alguns cofatores.

A 1ª coluna ou a 4ª linha apresentam dois elementos nulos. Escolhendo a 1ª coluna, vem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2).\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (1).\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2)\left((5).\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (3).\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) + (1)\left((2)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-5).\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (2)[(5)(-2) + (-3)(16)] + (1)[(2)(16) + (-5)(7)] = (2)[-10-48] + (1)[32-35] = -116-3 = -119$$

OBS: Repare que no determinante 3 x 3 foram escolhidos nas 2ª colunas os elementos a_{13} e a_{23}.

2. A 3ª linha possui somente um elemento não nulo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-3).\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3).\left((-2).\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (4).\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-3)[(-2).(0) + (4).(-6)] = (-3).[-24] = 72$$

OBS: Repare que no determinante 3 x 3 foram escolhidos na 2ª coluna os elementos a_{12} e a_{22}.

3. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal. Como um desses elementos é zero, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (8).(2).(0).(1) = 0$$

4. Aplicando Laplace na linha 1, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow (2).\left((x).\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - (x).\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2).[(x).(20)+(-x).(14)+(-1).(-2)] = 6 \Rightarrow (2).[20x-14x+2] = 6 \Rightarrow 6x+2=3 \Rightarrow x = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

5. Aplicando Laplace na coluna 1, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 3 & 1 & x & -2 \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -39 \Rightarrow (-1).\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -x \\ 4 & 1 & x \end{vmatrix} = -39 \Rightarrow (-1).\left((1).\begin{vmatrix} 0 & -x \\ 1 & x \end{vmatrix} - (2).\begin{vmatrix} 2 & -x \\ 4 & x \end{vmatrix} \right) = -39$$

$$\Rightarrow (-1).[(1).(x)+(-2).(6x)] = -39 \Rightarrow x-12x = 39 \Rightarrow -11x = 39 \Rightarrow x = -\frac{39}{11}$$

6. Observando que os elementos se assemelham à matriz original, é possível aplicar as propriedades dos determinantes.

a) A 4ª linha foi trocada com a 1ª linha. Logo o determinante fica com o sinal trocado. Isto é, vale 1470.

b) A 3ª coluna é o dobro da 1ª coluna. Logo, o determinante se anula. Vale zero.

c) A 3ª coluna é o dobro da 3ª coluna da matriz original. Logo o determinante dobra. Vale (-1470 x 2)

7. Laplace na 1ª linha:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x^2 \\ x & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (x).\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} - (1).\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = (2).(0)-(x).(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x).\big((x).(-x)+(-1).(x)\big)+(-1).\big((1).(x^2)+(1).(x)\big) = -x^3 \Rightarrow (x).[-x^2-x]+(-1).[x^2+x] = -x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3-x^2-x^2-x = -x^3 \Rightarrow -2x^2-x = 0 \Rightarrow -x(-2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

8. **E**

a) Não admite inversa, pois a linhas 1 e 3 são proporcionais e seu determinante vale zero.

b) Não admite inversa, pois a terceira linha é uma combinação linear das duas primeiras. Seu determinante também é zero

c) Não admite inversa, pois as linhas da matriz são proporcionais, seu determinante vale zero.

d) Não admite inversa, pois a terceira linha é igual ao dobro da segunda menos a primeira, seu determinante vale zero.

e) Seu determinante é – 36416 (diferente de zero). Logo, admite inversa.

9. B

Calculando o Determinante da matriz A.
A quarta linha foi multiplicada por -1 e somada com a terceira.
A quarta linha foi multiplicada por -3 e somada com a primeira.
Foi utilizado o Teorema de Laplace a partir da quarta colunada nova matriz obtida com as transformações acima.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-40 + 14 - 8 + 112 - 20 + 2) = 60$$

Calculando, agora, o determinante da matriz B.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 24 + 6 - 4 + 3 - 24 = 3$$

Determinante de C

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-2) = 6$$

Determinande de D.
$\det D = 2$

Portanto:

$$\frac{\det(A) \cdot \det(B)}{\det(C) \cdot \det(D)} = \frac{60 \cdot 3}{6 \cdot 2} = 15$$

10. Aplicando Laplace na 1ª coluna, temos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1).[-4] - (x-1)[-2.(x-1) - 1(x-1)] + (x-1).[2.(x-1) - 1(x-1)] =$$

$$= (x-1).[-4] - (x-1)[-2x + 2 - x + 1] + (x-1)[2x - 2 - x + 1] = (x-1).[-4] - (x-1)[-3x + 3] + (x-1)[x-1]$$

$$= (x-1)[-4 + 3x - 3 + x - 1] = (x-1).[4x-8].$$

Como essa expressão deve ser nula, temos:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1).[4x-8] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

OBS. Repare que para x = 1, a 1ª coluna seria toda nula, logo anularia o determinante. Se x = 2, a 2ª coluna seria igual à primeira, anulando também o determinante.